UNIVERZITET CRNE GORE

Elektrotehnički fakultet – Podgorica

Elektromagnetika

Polarizacija talasa

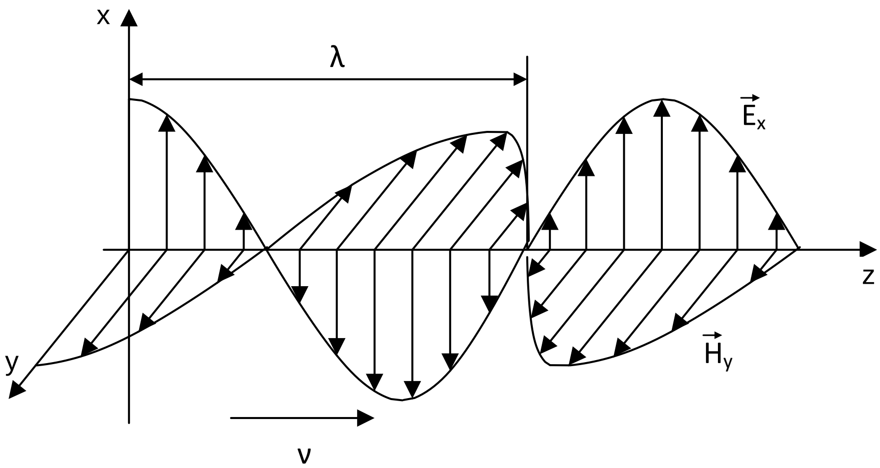
Snelovi zakoni refleksije i transmisije

1. Polarizacija talasa

Za elektromagnetni talas se kaže da je polarizovan ako se u svakom trenutku vremena može odrediti pravac njegovih komponenata $\vec{E}$ i $\vec{H}$. Ako se pravac vektora $\vec{E}$ i $\vec{H}$ mijenja kao slučajna veličina onda je takav talas nepolarizovan.

Najprostiji primjer polarizovanog talasa jeste ravanski talas koji ima samo $E_x(H_y)$ komponentu. Ravan koja sadrži pravac prostiranja talasa i vektor $\vec{E}$ naziva se ravan polarizacije talasa.

Na primjer:



Ravan polarizacije je x0z ravan.

Talas koji ima samo jednu komponentu električnog polja, na primjer E_x ili E_y je linijski polarizovan talas. Komponenta linijski polarizovanog talasa u vremenu mijenja samo intenzitet, a ne i pravac.

Linijska polarizacija, međutim, nije i jedina moguća polarizacija prostoperiodičnih ravanskih talasa. Ravanski prostoperiodični talasi, koji se prostiru u istom pravcu, ali imaju različite orjentacije, amplitude i faze vektora $\vec{E}$ i $\vec{H}$ formiraju rezultantni talas koji je i dalje ravanski, ali čija struktura može biti vrlo složena.

Na primjer: Posmatrajmo ravanski talas koga formiraju dva linijski polarizovana ravanska talasa sa E_x, odnosno E_y električnim poljima, koja uz to nijesu u fazi:

$$E_x = E_{0x} \cos(\omega t - \beta z) \tag{1}$$

$$E_y = E_{0z} \cos(\omega t - \beta z + \delta) \tag{2}$$

δ - fazni pomjeraj između električnih polja.

Trenutna vrijednost električnog polja rezultantnog talasa je geometrijski zbir dvaju komponenata E_x i E_y. Eliminacijom vremena iz relacija (1) i (2) dobija se geometrijsko mjesto tačaka koje opisuje vrh rezultantnog električnog polja E:

$$\frac{E_x}{E_{0x}} = \cos(\omega t - \beta z) \tag{3}$$

$$\frac{E_y}{E_{0y}} = \cos(\omega t - \beta z)\cos\delta - \sin(\omega t - \beta z)\sin\delta \tag{4}$$

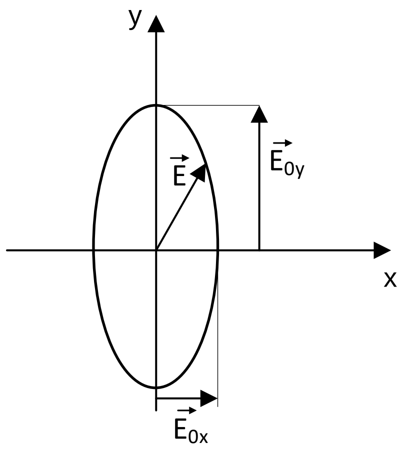
Kvadrirajući i sabirajući gornje dvije jednačine dobija se:

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 - 2\frac{E_x}{E_{0x}}\frac{E_y}{E_{0y}}\cos\delta + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 = \sin\delta \tag{5}$$

Prvi slučaj: Ako je $\delta = \pm\frac{\pi}{2}$ jednačina (5) postaje:

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 = 1 \tag{6}$$

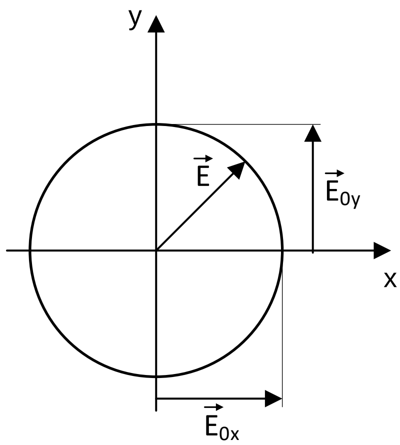
Što predstavlja elipsu sa poluosama E_{0x} i E_{0y}. Talas postaje eliptično polarizovan i vrh vektora $\vec{E}$ opisuje elipsu.



Drugi slučaj: Ako je $\delta = \pm\frac{\pi}{2}$ i $E_{0x} = E_{0y} = E_0$ jednačina (5) postaje:

$$E_x^2 + E_y^2 = E_0^2 \tag{7}$$

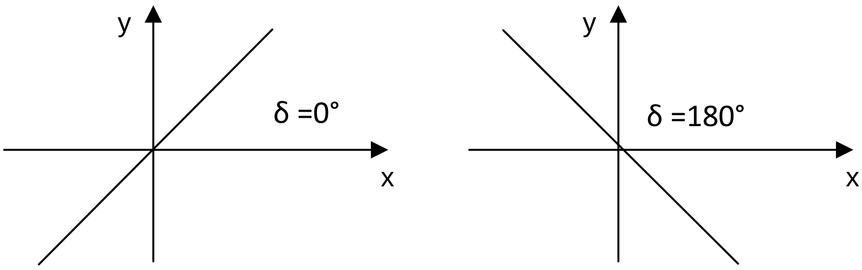
Što predstavlja kružnicu poluprečnika E_0. Talas je kružno polarizovan i vrh vektora $\vec{E}$ opisuje kružnicu.



Treći slučaj: Ako je $\delta = 0$ ili $\delta = \pi$ jednačina (5) postaje:

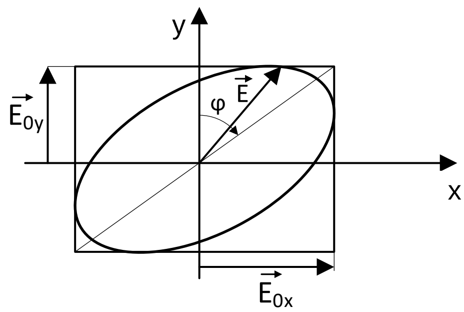
$$\frac{E_x}{E_{0x}} \mp \frac{E_y}{E_{0y}} = 0 \Rightarrow E_x = \pm \frac{E_{0x}}{E_{0y}} E_y = \pm const. E_y \tag{8}$$

Tada je rezultantni ravanski talas linijski polarizovan.



U najopštijem slučaju (za ostale vrijednosti faznog pomjeraja δ) jednačina (5) predstavlja jednačinu elipse upisane u pravougaonik stranica E_{0x} i E_{0y}, a glavne ose su joj okrenute za ugao φ određen relacijom

$$\mathrm{tg}\, 2\varphi = \frac{2E_{0x}E_{0y}}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2} \cos\delta \tag{9}$$



Analogno se može zaključiti i za rezultantno magnetno polje $\vec{H}$, jer je on u svakom trenutku normalan na rezultantni vektor $\vec{E}$. Ravan polarizacije se, shodno tome, neprekidno okreće u prostoru, pri čemu smjer okretanja zavisi od faznog pomjeraja δ.

Ako je $0° < \delta < 180°$ smjer okretanja vektora $\vec{E}$, gledano nasuprot pravcu prostiranja talasa je u smjeru kretanja kazaljke na satu, pa kažemo da je polarizacija lijeva. Ako je $-180° < \delta < 0°$ kažemo da je talas sa desnim smjerom polarizacije.

1.1 Ravanski talas koji se prostire u proizvoljnom pravcu

Mi smo ranije posmatrali ravanski talas koji se prostire u smjeru jedne, na primjer z-ose. Tada je njegov kompleksni izraz bio:

$$\underline{E} = \underline{E}_0 e^{-j\beta z} \qquad \text{U idealnom dielektriku} \tag{10}$$

ili:

$$\underline{E} = \underline{E}_0 e^{-j\gamma z} \qquad \text{U poluprovodnoj sredini} \tag{11}$$

Ovdje je $\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{-\omega^2 \underline{\varepsilon}\mu}$ kompleksna konstanta prostiranja, a $\underline{\varepsilon} = \varepsilon - j\dfrac{\sigma}{\omega}$ kompleksna dielektrična konstanta.

Neka se sada ravanski talas prostire u proizvoljnom pravcu, čiji je ort $\vec{n}_0$, tada je:

$$\vec{\underline{E}} = \underline{E}_0 e^{-\underline{\gamma}(n_x x + n_y y + n_z z)} \tag{12}$$

Gdje su n_x, n_y i n_z projekcije orta $\vec{n}_0$ na tri ose:

$$n_x = \cos\left[\sphericalangle(\vec{n}_0, \vec{i}_x)\right] \tag{13}$$

$$n_y = \cos\left[\sphericalangle(\vec{n}_0, \vec{i}_y)\right] \tag{14}$$

$$n_z = \cos\left[\sphericalangle(\vec{n}_0, \vec{i}_z)\right] \tag{15}$$

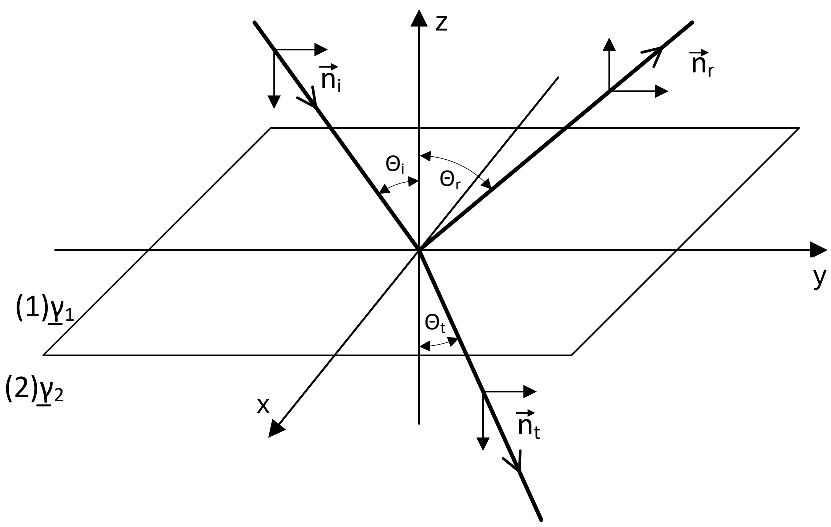
U idealnoj dielektričnoj sredini $\underline{\gamma} = j\beta = jk = j\dfrac{2\pi}{\lambda}$ pa je:

$$\vec{\underline{E}} = \underline{E}_0 e^{-jk(\vec{n}\cdot\vec{r})} \tag{16}$$

2 Snelovi zakoni refleksije i transmisije

Pri nailasku talasa na graničnu površinu između dvije u elektromagnetnom pogledu različite sredine doći će do prelamanja (refrakcije) upadnog talasa. Sa druge strane na graničnoj površini dolazi do izdvajanja slobodnih i vezanih naelektrisanja čija se gustina mijenja u vremenu. Ova naelektrisanja postaju izvor sekundarnih talasa koji se prostiru u obje sredine. Tako pored upadnog (incidentnog) imamo i odbijeni (reflektovani) i transmitovani (refraktovani) talas. Proučićemo sada zakone ponašanja elektromagnetnog ravanskog talasa između dvije homogene sredine.

Neka su sredine poluprovodne i neka su konstante prostiranja u njima $\underline{\gamma}_1$ i $\underline{\gamma}_2$. Jednostavnosti radi uzećemo da je incidentalna ravan (ravan koja je normalna na graničnu površinu i sadrži Pointigov vektor upadnog talasa) y0z ravan. Ovo pojednostavljenje neće uticati na opštost zaključaka.



x0y – granična ravan, y0z – incidentalna ravan

U odabranom koordinatnom sistemu izrazi za električna polja sva tri talasa su:

$$\underline{\vec{E}}_i = \underline{\vec{E}}_{0i} e^{-\underline{\gamma}_1 (n_{i_x} x + n_{i_y} y + n_{i_z} z)} \tag{17}$$

$$\underline{\vec{E}}_r = \underline{\vec{E}}_{0r} e^{-\underline{\gamma}_1 (n_{r_x} x + n_{r_y} y + n_{r_z} z)} \tag{18}$$

$$\underline{\vec{E}}_t = \underline{\vec{E}}_{0t} e^{-\underline{\gamma}_2 (n_{t_x} x + n_{t_y} y + n_{t_z} z)} \tag{19}$$

Za incidentalnu y0z ravan, projekcije ortova pravaca prostiranja talasa su:

$$n_{ix} = 0 \qquad n_{iy} = \sin\theta_i \qquad n_{iz} = -\cos\theta_i \tag{20}$$

$$n_{rx} = 0 \qquad n_{ry} = \sin\theta_r \qquad n_{rz} = \cos\theta_r \tag{21}$$

$$n_{tx} = 0 \qquad n_{ty} = \sin\theta_t \qquad n_{tz} = -\cos\theta_t \tag{22}$$

Tako da su sada polja:

$$\underline{\vec{E}}_i = \underline{\vec{E}}_{0i} e^{-\underline{\gamma}_1 (y\sin\theta_i - z\cos\theta_i)} \tag{23}$$

$$\underline{\vec{E}}_r = \underline{\vec{E}}_{0r} e^{-\underline{\gamma}_1 (y\sin\theta_r + z\cos\theta_r)} \tag{24}$$

$$\underline{\vec{E}}_t = \underline{\vec{E}}_{0t} e^{-\underline{\gamma}_2 (y\sin\theta_t - z\cos\theta_t)} \tag{25}$$

Isti izrazi se mogu napisati i za magnetne komponente polja.

Na graničnoj površini (x0y) za $z = 0$ moraju biti zadovoljeni granični uslovi: jednakost tangencijalnih komponenti električnog polja sa jedne i druge strane granične površine. Ovo će biti moguće samo kao je:

$$\underline{\gamma}_1 \sin\theta_i = \underline{\gamma}_1 \sin\theta_r = \underline{\gamma}_2 \sin\theta_t \quad (26)$$

Odavde slijedi da je:

$$\theta_i = \theta_r \quad (27)$$

$$\frac{\underline{\gamma}_1}{\underline{\gamma}_2} = \frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i} \quad (28)$$

Ove dvije relacije predstavljaju Snelove zakone refleksije i transmisije (odbijanja i prelamanja) u kompleksnoj formi.

Ako su obje sredine idealni dielektrici ove relacije postaju:

$$\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\sin\theta_i = \sqrt{\varepsilon_2\mu_2}\sin\theta_t \quad (29)$$

Uvodeći indeks prelamanja sredina kao odnos brzine prostiranja talasa u vakuumu i posmatranom dielektriku:

$$n = \frac{c}{\upsilon} = c\sqrt{\varepsilon\mu} \quad (30)$$

Drugi Snelov zakon postaje:

$$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t \quad (31)$$

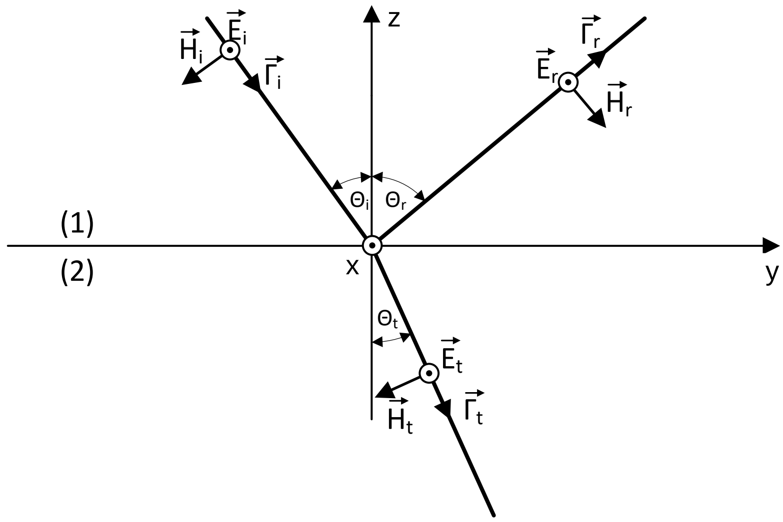
Za većinu dielektrika $\mu = \mu_0$ pa je indeks prelamanja $n = \sqrt{\varepsilon_r}$.

2.1 Frenelovi koeficijenti refleksije i transmisije

Prema Snelovim zakonima određuju se uglovi refleksije i transmisije u odnosu na poznati incidentalni (upadni) ugao. Frenelovi koeficijenti će nam dati vezu između amplituda polja za sva tri talasa na graničnoj površini. U opštem slučaju, kada komponente talasa zauzimaju proizvoljne uglove u odnosu na koordinatne ose, ovo nije jednostavan zadatak. Zbog toga ćemo posmatrati dva specijalna slučaja, a svaki drugi slučaj se može predstaviti kao superpozicija ova dva posebna slučaja.

1. Slučaj: kada je električno polje normalno ma incidentalnu ravan (normalna polarizacija)
2. Slučaj: kada je električno polje paralelno incidentalnoj ravni (paralelna polarizacija)

1. Slučaj: Frenelovi koeficijenti za slučaj normalne polarizacije:



x0y – granična ravan, y0z – incidentalna ravan

Prvi Snelov zakon daje da je: $\theta_i = \theta_r$.

Na graničnoj ravni (x0y) $z = 0$ tangencijalne komponente električnog polja moraju biti jednake. U slučaju normalne polarizacije električne komponente talasa su kompletno tangencijalne. To znači da mora biti zadovoljen uslov:

$$\underline{E}_{0i} e^{-\underline{\gamma}_1 y \sin\theta_i} + \underline{E}_{0r} e^{-\underline{\gamma}_1 y \sin\theta_r} = \underline{E}_{0t} e^{-\underline{\gamma}_2 y \sin\theta_t} \tag{32}$$

S obzirom na Snelove zakone $\theta_i = \theta_r$ i $\underline{\gamma}_1 \sin\theta_i = \underline{\gamma}_2 \sin\theta_t$, slijedi:

$$\underline{E}_{0i} + \underline{E}_{0r} = \underline{E}_{0t} \tag{33}$$

Takođe, na graničnoj ravni ($z = 0$) tangencijalne komponente magnetnog polja moraju biti jednake, pri čemu su: $\underline{H}_{0i} = \dfrac{\underline{E}_{0i}}{\underline{z}_1}$; $\underline{H}_{0r} = \dfrac{\underline{E}_{0r}}{\underline{z}_1}$; $\underline{H}_{0t} = \dfrac{\underline{E}_{0t}}{\underline{z}_2}$, $\underline{z}_1$ i $\underline{z}_2$ su karakteristične impedanse sredina.

$$\underline{H}_{0r} \cos\theta_r - \underline{H}_{0i} \cos\theta_i = -\underline{H}_{0t} \cos\theta_t \tag{34}$$

$$\frac{1}{\underline{z}_1} (\underline{E}_{0r} - \underline{E}_{0i}) \cos\theta_i = -\frac{\underline{E}_{0t}}{\underline{z}_2} \cos\theta_t \tag{35}$$

Koeficijenti refleksije i transmisije se definišu kao odnosi amplituda električnog polja reflektovanog i transmitovanog talasa i amplitude električnog polja upadnog talasa:

$$\underline{R}_n = \frac{\underline{E}_{0r}}{\underline{E}_{0i}} \tag{36}$$

i

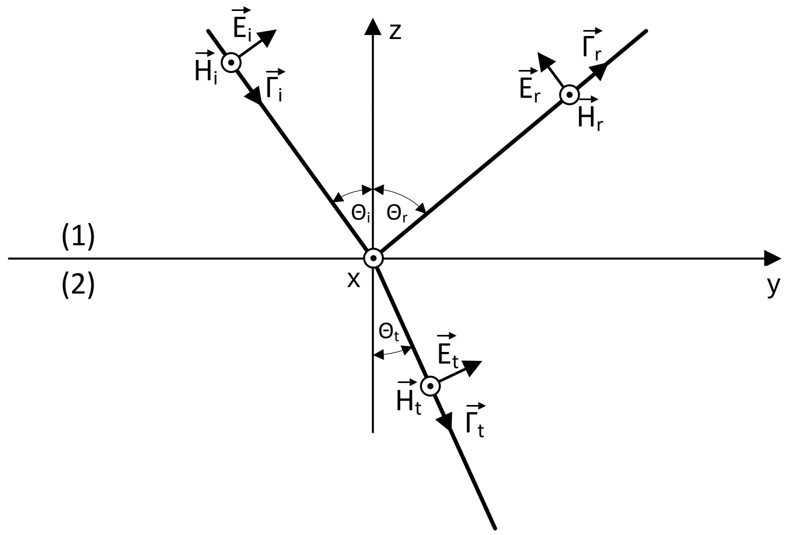
$$\underline{T}_n = \frac{\underline{E}_{0t}}{\underline{E}_{0i}} \tag{37}$$

Iz jednačina (33) i (35) slijedi:

$$\underline{R}_n = \frac{\underline{z}_2 \cos\theta_i - \underline{z}_1 \cos\theta_t}{\underline{z}_2 \cos\theta_i + \underline{z}_1 \cos\theta_t} \tag{38}$$

$$\underline{T}_n = \frac{2\underline{z}_2 \cos\theta_i}{\underline{z}_2 \cos\theta_i + \underline{z}_1 \cos\theta_t} \tag{39}$$

2. Slučaj: Frenelovi koeficijenti refleksije i transmisije za slučaj paralelne polarizacije



x0y – granična ravan, y0z – incidentalna ravan

H_i, H_r i H_t su u pravcu pozitivnog smjera x-ose.

Granični uslovi su:

U ravni $z = 0$ tangencijalne komponente magnetnog polja moraju biti jednake:

$$\underline{H}_{0i} + \underline{H}_{0r} = \underline{H}_{0t} \tag{40}$$

Tangencijalne komponente električnog polja na graničnoj površini moraju biti jednake:

$$\underline{E}_{0i} \cos\theta_i - \underline{E}_{0r} \cos\theta_r = \underline{E}_{0t} \cos\theta_t \tag{41}$$

Iz jednačina (40) i (41) slijedi da je:

$$\underline{R}_p = \frac{\underline{E}_{0r}}{\underline{E}_{0i}} = \frac{\underline{z}_1 \cos\theta_i - \underline{z}_2 \cos\theta_t}{\underline{z}_1 \cos\theta_i + \underline{z}_2 \cos\theta_t} \tag{42}$$

$$\underline{T}_p = \frac{\underline{E}_{0t}}{\underline{E}_{0i}} = \frac{2\underline{z}_2 \cos\theta_i}{\underline{z}_1 \cos\theta_i + \underline{z}_2 \cos\theta_t} \tag{43}$$

2.2 Prelamanje i odbijanje talasa na granici dva idealna dielektrika

U opštem slučaju Frenelovi koeficijenti su kompleksne veličine. U slučaju idealnih dielektrika karakteristična impedansa sredine $z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ je realna veličina, pa su i Frenelovi koeficijenti takođe realni i imaju sledeći oblik:

$$R_n = \frac{z_2 \cos\theta_i - z_1 \cos\theta_t}{z_2 \cos\theta_i + z_1 \cos\theta_t} \tag{44}$$

$$T_n = \frac{2z_2 \cos\theta_i}{z_2 \cos\theta_i + z_1 \cos\theta_t} \tag{45}$$

$$R_p = \frac{z_1 \cos\theta_i - z_2 \cos\theta_t}{z_1 \cos\theta_i + z_2 \cos\theta_t} \tag{46}$$

$$T_p = \frac{2z_2 \cos\theta_i}{z_1 \cos\theta_i + z_2 \cos\theta_t} \tag{47}$$

U slučaju normalne incidencije ($\theta_i = \theta_t = 0$) Frenelovi koeficijenti za oba tipa polarizacije imaju iste vrijednosti:

$$R = R_n = -R_p = \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} \tag{48}$$

$$T = T_n = T_p = \frac{2z_2}{z_1 + z_2} \tag{49}$$

A kako je najčešće $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$

$$R = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}} \tag{50}$$

$$T = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}} \tag{51}$$

Koeficijent T je uvijek pozitivan, što znači da dio incidentalnog talasa koji prelazi u drugu sredinu (transmisioni talas) pri prelazu kroz graničnu površinu dva idealna dielektrika ne mijenja fazu.

Kako je prema Snelovom zakonu $\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \frac{z_1}{z_2}$ koeficijente refleksije i transmisije možemo napisati i u sledećem obliku:

$$R_n = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \tag{52}$$

$$T_n = \frac{2\sin\theta_t \cos\theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \tag{53}$$

$$R_p = \frac{\mathrm{tg}(\theta_i - \theta_t)}{\mathrm{tg}(\theta_i + \theta_t)} \tag{54}$$

$$T_p = \frac{2\sin\theta_t \cos\theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)\cos(\theta_i - \theta_t)} \tag{55}$$

U slučaju da je $\theta_i + \theta_t = \frac{\pi}{2}$ slijedi da je $R_p = 0$ što znači da u ovom slučaju reflektovani talas potpuno iščezava. Incidentalni ugao $\theta_i = \theta_B$ pri kom se dešava da nema refleksije se zove ugao totalne transmisije ili Brusterov ugao.

Njega ćemo naći iz uslova:

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = \frac{\sin\theta_B}{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta_B)} = \mathrm{tg}\,\theta_B = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \tag{56}$$

$$\mathrm{tg}\,\theta_B = \frac{n_2}{n_1} \tag{57}$$

$$n_1 = \sqrt{\varepsilon_{r1}} \tag{58}$$

$$n_2 = \sqrt{\varepsilon_{r2}} \tag{59}$$

Ako je $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ tada je $\theta_t > \theta_i$. Tako za neki $\theta_i = \theta_T$ biće $\theta_t = \frac{\pi}{2}$, što je najveća moguća vrijednost ugla refleksije, onda za $\theta_i > \theta_T$ neće postojati transmitovani talas, već će se upadni talas totalno reflektovati. Ugao pri kome dolazi do ove pojave zove se ugao totalne refleksije.

$$\sin\theta_T = \frac{n_2}{n_1} \tag{60}$$

Ovaj fenomen se koristi u optici (dielektrični talasovodi) gdje se elektromagnetni talas vodi kroz dielektričnu sredinu postavljenu u vazduhu. Izborom upadnog ugla i dielektrične konstante dielektrika od koga je napravljen talasovod, moguće je ostvariti da se talas totalno reflektuje sa zidova talasovoda, tj da ne „izlazi“ iz te sredine.